

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ  
КАФЕДРА КОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРИКЛАДНОЙ АСТРОДИНАМИКИ

Латыпова Альбина Наилевна

Выпускная квалификационная работа бакалавра

# **ИССЛЕДОВАНИЯ ХАОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Направление 010400.62  
Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент  
Степенко Н. А.

Санкт-Петербург  
2016

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>Постановка задачи</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Некоторые элементы теории хаоса</b>	<b>6</b>
1.1. Хаотические системы . . . . .	6
1.2. Аттракторы . . . . .	7
1.3. Показатели Ляпунова . . . . .	8
<b>Глава 2. Вычисление старшего показателя Ляпунова по временному ряду методом Вольфа</b>	<b>12</b>
2.1. Восстановление аттрактора по временному ряду методом Такенса . . . . .	12
2.2. Описание алгоритма . . . . .	13
2.3. Пример. Аттрактор Лоренца . . . . .	15
<b>Глава 3. Вычисление старшего показателя Ляпунова для одной модели звездной динамики</b>	<b>18</b>
3.1. Описание модели движения звезды . . . . .	18
3.2. Реконструкция аттракторов по временным рядам псевдоэкспериментальных данных . . . . .	20
3.3. Расчет старшего показателя Ляпунова для различных классов движений звезды . . . . .	25
<b>Выводы</b>	<b>29</b>
<b>Список литературы</b>	<b>31</b>

# Введение

При исследовании свойств различных динамических систем в настоящее время получил актуальность подход, основанный на анализе сигналов, произведенных системой. Такой метод применим в тех случаях, когда сам процесс математически описать практически невозможно, однако есть возможность наблюдать некоторую величину. Например, электрокардиограмма, запись колебаний земной коры, данные метеонаблюдений, биржевой курс, солнечная активность и т.п. Поэтому такой анализ часто реализуется путем обработки фиксируемых сигналов. Изменение со временем некоторой переменной называется (скалярным) временным рядом, а если измеряется несколько переменных — векторным, метод называется реконструкцией динамических систем, а раздел теории динамических систем — анализом временных рядов [1, 2, 3]. Временные ряды естественным образом возникают в экспериментах как натуральных (тогда получается непрерывный ряд  $y(t)$ ), так и численных (тогда получается дискретный ряд). Конечно, наличие только лишь наблюдаемых данных усложняет процесс изучения системы по сравнению с тем случаем, когда имеется полное ее решение. Поэтому необходимо вводить дополнительные ограничения при реализации метода реконструкции [4].

Скалярным временным рядом  $x_1, \dots, x_N$  называется массив из  $N$  чисел, которые представляют собой значения некоторой наблюдаемой динамической переменной  $x(t)$  с постоянным по времени шагом  $\tau$ , где  $t_i = t_0 + (i - 1)\tau$ ,  $x_i = x(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . При анализе временных рядов выделяются две основные задачи, первая из которых — задача идентификации, а вторая — задача прогноза. Задача идентификации заключается в нахождении таких параметров системы, породившей данный временной ряд, как размерность вложения, корреляционная размерность, энтропия и др. Размерностью вложения называется наименьшее число независимых переменных, которые однозначно определяют установившееся движение исходной диссипативной распределенной системы. Обычно размерность вложения обозначают как  $d$ . Подмножество, к которому с течением времени стягиваются все близлежащие траектории системы — это аттрактор [1, 5, 6]. Размерность вложения аттрактора — это минимальная размерность фазового пространства, в которое без самопересечений может быть помеще-

но гладкое многообразие, целиком содержащее этот аттрактор. Например, двумерный тор вложим только в трехмерное пространство и пространство большей размерности. Корреляционная размерность является оценкой фрактальной размерности аттрактора системы и частным случаем обобщенной вероятностной размерности. Понятие энтропии связано с предсказуемостью значений ряда и всей системы.

Исследование временных рядов основано на идее, что для получения удовлетворительной геометрической картины странного аттрактора, вместо входящих в исходную систему переменных можно использовать векторы задержек наблюдаемой  $z_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1})$ . Впервые данный подход к анализу временных рядов был математически обоснован в работе Ф.Такенса [7]. То есть наиболее интересным приложением теории динамических систем может являться прогнозирование динамики временных рядов, порождаемых ими. При этом предполагается, что характеристики систем могут быть неизвестны. Таким образом, теоретические исследования, основанные на анализе временных рядов, могут дать мощный инструмент для понимания многих явлений, особенно когда имеющихся данных для построения модели может быть недостаточно.



## Постановка задачи

- Исследование динамики движения звезды на примере стационарной ротационно-симметричной модели галактики для некоторых фиксированных наборов параметров и начальных данных. Генерация псевдоэкспериментальных данных.
- Реконструирование аттрактора методом Такенса по временному ряду псевдоэкспериментальных данных одной наблюдаемой переменной, соответствующего основному аттрактору исходной системы.
- Определение старшего показателя Ляпунова с использованием метода Вольфа по временным рядам псевдоэкспериментальных данных рассмотренной модели галактики (на основе восстановленных аттракторов).

# Глава 1. Некоторые элементы теории хаоса

## 1.1. Хаотические системы

Одним из фундаментальных понятий теории хаоса является динамическая система [1, 2, 4, 5]. Под динамической системой понимается объект (механический, физический, химический, биологический и т. д.) или процесс произвольной природы, для которого однозначно определен набор величин, называемых динамическими переменными, которые характеризуют состояние системы в данный момент времени, и заданы уравнения эволюции, описывающие изменение системы с течением времени. Изменение динамической системы происходит в пространстве состояний, или фазовом пространстве, в котором положение точки определяют фазовые координаты. Динамику системы во времени можно представить как движение точки по траектории, называемой фазовой траекторией.

Исходя из наличия или отсутствия потери энергии динамические системы различают на: диссипативные, в которых внутренняя энергия системы с течением времени уменьшается, и консервативные или гамильтоновы, в которых эта энергия остается неизменной. В теории хаоса основным объектом изучения являются хаотические динамические системы. Такие системы имеют долговременное апериодическое поведение, то есть отсутствие каких-либо периодических орбит и демонстрируют высокую чувствительность к начальным данным. Последнее означает, что малейшая неточность начального состояния системы с течением времени стремительно возрастает, что приводит к необратимым последствиям. Хаотические системы в большинстве случаев являются диссипативными.

Необходимым условием возникновения хаоса в дифференциальных системах является размерность фазового пространства  $N \geq 3$  (в непрерывном случае).

Проявления хаоса имеются практически во всех научных областях [1, 5, 8, 9]. И в природе, и в повседневной жизни процессов, кажущихся хаотическими и случайными достаточно много. Простейший пример – турбулентное движение жидкости в чайнике, кипящем на сильном огне, или в горной реке. Форма облаков или горных рельефов так же кажется непредсказу-

емой и случайной. Численность популяций некоторых видов насекомых с течением времени претерпевает хаотические изменения. Концентрация веществ при прохождении химической реакции также меняется нерегулярным образом. Если воздействовать некой периодической внешней силой на обычный математический маятник, то его вынужденные колебания становятся хаотическими при превышении амплитуды вынуждающей силы некоторого критического значения.

## 1.2. Аттракторы

Множеством состояний, к которому стремится динамическая система с течением времени, является аттрактор [5, 9]. Самый простой тип аттрактора — неподвижная точка. Простейший пример — движение маятника при наличии трения. Независимо от начального состояния, маятник со временем всегда будет иметь точкой покоя одно и то же положение. Предельный цикл является более сложным типом аттрактора и имеет в фазовом пространстве форму замкнутой петли. Такой аттрактор описывает устойчивые колебания. К примеру, движение маятника в часах или биение сердца. Еще один тип аттрактора имеет форму тора. Он соответствует сложному колебанию или квазипериодическому движению. Поведение всех трех аттракторов можно прогнозировать с любой точностью [5].

В 1971 году Рюэль и Такенс [7] ввели аттракторы, топологически отличимые от предыдущих, которые получили название „странные аттракторы“. Термин „странный“ говорит о наличии у таких аттракторов необычных свойств. Наиболее важным из которых является высокая чувствительность к сколь угодно малым изменениям начальных данных, которые впоследствии приводят к значительному отклонению траектории относительно своего невозмущенного положения. Кроме того, это расхождение возрастает со временем экспоненциально. Такие хаотические аттракторы соответствуют движению, которое предсказать практически невозможно [8].

Ярким примером является аттрактор Лоренца. Решая задачу о тепловой конвекции жидкости [10, 11], метеоролог Эдвард Лоренц обнаружил, что решением простой системы (1) из трех связанных нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка являются хаотические траектории.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(y - x), \\
\dot{y} &= x(r - z) - y, \\
\dot{z} &= xy - bz.
\end{aligned} \tag{1}$$

При значениях параметров  $\sigma = 16$ ,  $r = 45.92$ ,  $b = 4$  фазовый портрет системы (1) отображен на рис. 6.

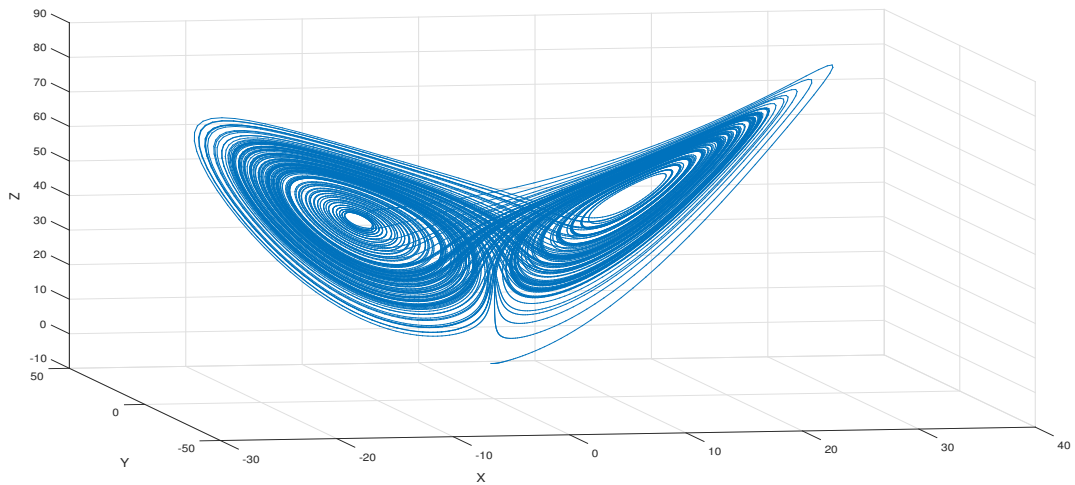


Рис. 1: Аттрактор Лоренца

### 1.3. Показатели Ляпунова

При исследовании нелинейных систем одной из важных задач является определение типа колебаний – периодического, квазипериодического, случайного, хаотического. Особенно сложно отличить квазипериодические колебания от хаотических и случайных, так как квазипериодические колебания часто имеют очень сложную форму, визуально слабо отличимую от «случайной». В настоящее время существуют различные критерии определения хаоса [6, 8]. Простейшим методом является исследование спектра колебаний на основе анализа Фурье [8]. Дискретность спектра идентифицирует периодические или квазипериодические колебания, в случае непрерывности спектра колебания являются либо хаотическими, либо случайными.

В качестве альтернативы также успешно применяется измерение хаоса с помощью численного анализа фундаментальных частот [12]. Другой метод основан на применении отображений Пуанкаре, то есть сечений фазовой траектории при помощи секущей поверхности [1]. Отображение Пуанкаре случайного процесса будет иметь вид облака, а для квазипериодических и хаотических решений - форму некоторой линии.

Особенностью хаотических колебаний является их высокая чувствительность к малым изменениям начальных условий. Диагностировать, находится ли динамическая система в хаотическом состоянии или нет, позволяет определение скорости разбегания траекторий, которая оценивается с помощью показателей Ляпунова [1, 2, 6]. Для большинства динамических систем расчёт показателей Ляпунова возможен только численно. Наиболее важно определение старшего (наибольшего) показателя Ляпунова, так как именно он описывает тип колебаний.

Предположим, что задана  $N$ -мерная динамическая система с непрерывным временем. Чтобы охарактеризовать устойчивость ее решения, анализируется временная эволюция бесконечно малой  $N$ -мерной сферы начальных условий, с течением времени эта сфера преобразуется в эллипсоид. Если говорить о спектре показателей Ляпунова, то  $i$ -й показатель Ляпунова может быть определен в терминах длин осей эллипсоида  $p_i(t)$  :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_i(t)}{p_i(0)}.$$

где  $\lambda_i$  упорядочены от наибольшего к наименьшему. Таким образом, показатели Ляпунова определяются расширением либо сжатием сферы по различным направлениям в фазовом пространстве (Рис. 2). Поскольку ориентация эллипсоида непрерывно меняется со временем, меняются и направления, ассоциирующиеся с тем или иным показателем. Поэтому нельзя говорить о каком-то одном направлении для каждой ляпуновской экспоненты.

Для хаотического решения, связанного со странным аттрактором, чувствительная зависимость начальных условий означает существование положительного показателя Ляпунова. Это – прямое следствие среднего расхождения соседних траекторий. Следовательно, получение положительного показателя есть верный признак хаотического режима. Вычисляя по

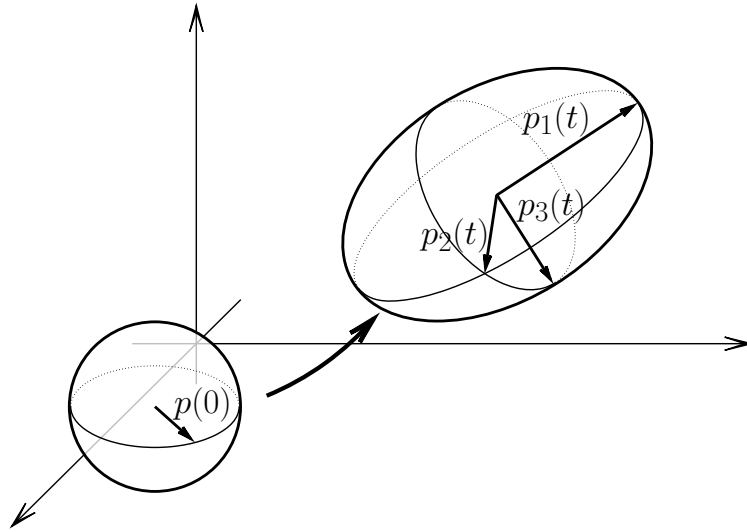


Рис. 2: Долговременная эволюция движений  $p$ -мерной сферы начальных условий

определению показателя ляпунова периодического или квазипериодического решения, мы получаем показатель Ляпунова равный нулю. Обобщая эти простые рассуждения, естественно идентифицировать аттракторы по показателям ляпунова. Если обозначить положительный показатель знаком плюс, отрицательный - знаком минус, а нулевой - нулем, тогда аттрактору в фазовом пространстве размерности  $N$  будет отвечать определенный набор из  $N$  знаков, о котором говорится как о сигнатуре спектра ляпуновских показателей.

При  $N = 1$ :

$< - >$  — устойчивая точка покоя.

При  $N = 2$ :

$< - , - >$  — фокус,

$< 0 , - >$  — предельный цикл.

В случае  $N = 3$ :

$< - , - , - >$  — фокус,

$< 0 , - , - >$  — предельный цикл,

$< 0 , 0 , - >$  — двумерный тор,

$< + , 0 , - >$  — странный аттрактор (хаос).

Существует два метода вычисления показателей Ляпунова. Для данных, порожденных известной системой дифференциальных уравнений —

это алгоритм Бенеттина [1, 2, 13].

Однако, закон динамической системы зачастую является неизвестным и получить информацию о его характеристиках, режимах поведения и других качественных свойств и, более того, измерить все фазовые координаты системы невозможно. В таких случаях для оценки старшего показателя Ляпунова хаотической системы используют метод, основанный на обработке данных из экспериментальных временных рядов. Этот метод был впервые предложен Вольфом [13] и основан на теореме Такенса [4] и алгоритме Бенеттина.

## Глава 2. Вычисление старшего показателя Ляпунова по временному ряду методом Вольфа

### 2.1. Восстановлении аттрактора по временному ряду методом Такенса

Пусть имеется некоторая динамическая система, а так же известны равноотстоящие по времени измерения одной фазовой координаты этой системы. Тогда их можно записать в виде временного ряда следующим образом:

$$x(1), x(2), \dots, x(N), \quad (2)$$

где  $N$  — количество измерений.

Основная идея оценки размерности аттрактора исходной хаотической системы основана на использовании для этих целей аттрактора, полученного при помощи так называемой псевдофазовой реконструкции [2]. Псевдофазовая реконструкция — это отображение, которое точке  $x(t)$  временного ряда (2) ставит в соответствие точку  $[x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (m - 1)\tau)]$ , где  $t$  — дискретное время ( $t = ((m - 1)\tau + 1), N$ ),  $\tau$  — временная задержка (в дискретах времени) и  $m$  — размерность пространства вложения. Такенс [7] показал, что используя только одну координату динамической системы, можно реконструировать исходный аттрактор в пространстве точек с задержками  $[x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (m - 1)\tau)]$  таким образом, что он будет сохранять важнейшие геометрические и динамические свойства оригинального аттрактора и для оценки характеристик реального исследуемого аттрактора можно вычислять характеристики восстановленного аттрактора. В данном утверждении под фразой важнейшие динамические свойства следует понимать диссипативность и хаотичность системы, а под важнейшими геометрическими свойствами — топологические инварианты аттрактора такие, например, как фрактальная размерность. Размерность  $m$  определяется по формуле  $m \geq 2[d] + 1$ , где  $d$  — фрактальная размерность аттрактора,  $[d]$  — обозначает целую часть фрактальной размерности. Выполнение неравенства  $m \geq 2[d] + 1$  гарантирует сохранение указан-



ных свойств, однако эксперименты показывают, что данная нижняя оценка размерности пространства вложения является несколько завышенной. Для некоторых простых хаотических систем сохранение упомянутых свойств наблюдается даже при  $m = [d + 1]$ .

Таким образом, анализ хаотических процессов заключается в определении параметров вложения динамической системы, а именно в выборе подходящей временной задержки сигнала  $\tau$  и размерности  $m$  пространства вложения для псевдофазовой реконструкции.

Для выбора временной задержки  $\tau$  могут быть использованы следующие подходы [2]:

- метод автокорреляционной функции;
- метод взаимной информации;
- метод среднего отклонения;

Следующий шаг — выбор размерности  $m$  пространства вложения [2]. Существуют следующие методы оценки  $m$ :

- метод корреляционной размерности;
- метод ложных ближайших соседей;
- гамма-тест.

## 2.2. Описание алгоритма

Метод расчета старшего показателя Ляпунова по временному ряду, предложенный Вольфом с соавторами [13], использует ту же идеологию, что и стандартный подход нахождения спектра показателей Ляпунова, когда математическая модель динамической системы известна (метод Беннеттина), однако возникает одна проблема: задавать вектор возмущения произвольным образом невозможно. Поэтому на первом этапе процедуры расчета показателя необходимо реконструировать аттрактор [1, 2].

Пусть имеется временной ряд  $x(t)$ ,  $t = 1 \dots N$  измерений (равноотстоящих по времени) одной координаты хаотического процесса и определены

размерность пространства вложения  $m$  и временная задержка  $\tau$ . В результате реконструкции получен набор точек:

$$x_i = [x(i), x(i - \tau), \dots, x(i - (m - 1)\tau)], \quad (3)$$

где  $i = ((m - 1)\tau + 1), \dots, N$ .

Из последовательности (3) выбирается точка и обозначается через  $x_0$ . Далее, просматривая последовательность, находится точка  $\tilde{x}_0$ , удовлетворяющая условию  $\|\tilde{x}_0 - x_0\| = \varepsilon_0 < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — фиксированная величина (существенно меньше размеров реконструированного аттрактора). При этом необходимо, чтобы точки  $x_0$  и  $\tilde{x}_0$  были разделены по времени. Эволюцию выбранных на реконструированном аттракторе точек отслеживается до тех пор, пока расстояние между траекториями не превысит заданную величину  $\varepsilon_{max}$ . Величина  $\varepsilon_{max}$  задает условие линейного приближения. Часто она может быть задана в процентном соотношении от размера рассматриваемого аттрактора (например, 5 — 10%). Необходимо определять и минимальное значение ограничения, так как в случае если оно слишком мало, может сказываться влияние шума, нарушающего экспоненциальный характер разбегания траекторий.

Обозначим полученные точки через  $x_1$  и  $\tilde{x}_1$ , расстояние между ними через  $\varepsilon'_0$ , а промежуток времени эволюции через  $T_1$ .

Далее, вновь просматривается последовательность (3) и находится такая точка  $\tilde{x}'_1$ , близкая к точке  $x_1$ , такая что выполняется условие  $\|\tilde{x}'_1 - x_1\| = \varepsilon_1 < \varepsilon$ , а векторы  $\tilde{x}_1 - x_1$  и  $\tilde{x}'_1 - x_1$  имеют, по-возможности, одинаковое направление.

Далее процедура повторяется, но вместо точек  $x_0$  и  $\tilde{x}_0$  рассматриваются точки  $x_1$  и  $\tilde{x}'_1$ , соответственно. Все расстояния  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon'_i$  и промежутки времени  $T_i$  на каждом  $i$ -м шаге сохраняются. На рис. 3 графически отображен процесс нахождения старшего показателя Ляпунова по временному ряду.

Тогда, повторив описанную процедуру  $M$  раз, можно оценить старший показатель Ляпунова так:

$$\lambda = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} \ln \frac{\varepsilon'_k}{\varepsilon_k}}{\sum_{k=1}^M T_k} \quad (4)$$

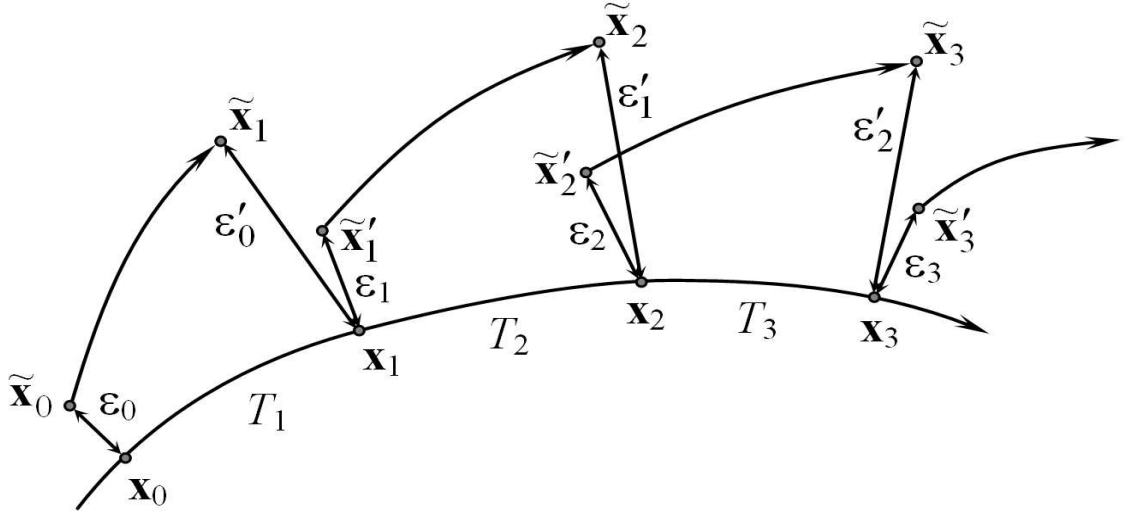


Рис. 3: К оценке старшего показателя Ляпунова по выборке из одной наблюдаемой координаты.

Такой подход базируется на эргодической теореме В. И. Оселедца [2, 14], которая утверждает, что экспоненциальное расхождение двух случайно выбранных точек на аттракторе с единичной вероятностью характеризует старший показатель Ляпунова.

Однако, зачастую, интересуются более чем одним первым показателем Ляпунова. Алгоритм может расширяться для измерения  $\lambda_1 + \lambda_2$ , но становится заметно сложнее [13]. Он должен следить за треугольником точек и сохранять ориентацию относительно треугольника, которому выбирают замену.

### 2.3. Пример. Аттрактор Лоренца

При реконструкции аттрактора по временному ряду, Вольф [13] использовал как пример систему Лоренца:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= x(r - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{5}$$

Она хорошо изучена [1, 15]. При фиксированном наборе параметров  $\sigma = 16$ ,  $r = 45.92$ ,  $b = 4$ , аттрактор Лоренца будет странным или хаотическим. Для формирования временного ряда используются наблюдения по координате  $x$  (Рис. 4) :  $[-0.1561, -0.0711, 0.0046, \dots, 5.3879, 4.5573, 3.7914]$ . Размерность ряда равна 16384. Далее его значения используются как псевдоэкспериментальные данные для реконструкции аттрактора.

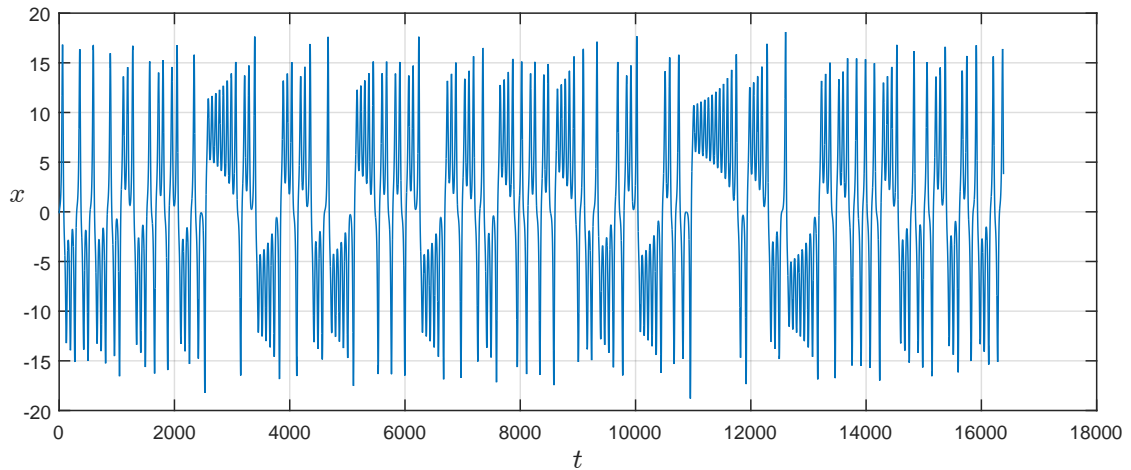


Рис. 4: Временной ряд

В результате, после применения метода, получен восстановленный псевдоаттрактор, схожий по геометрическим и динамическим свойствам с самим аттрактором Лоренца, что нетрудно заметить наглядным образом (Рис. 5 и Рис. 6).

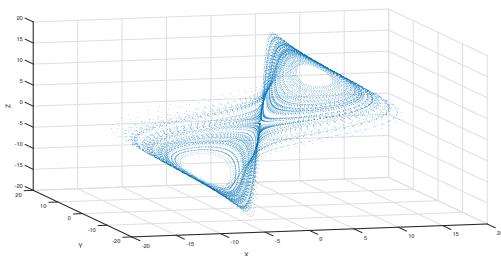


Рис. 5: Реконструированный аттрактор.

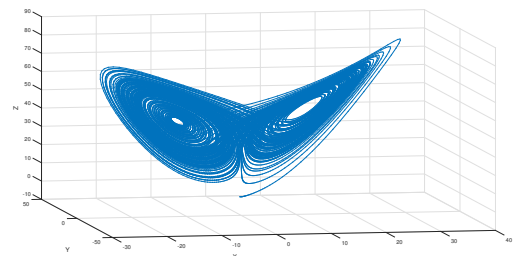


Рис. 6: Аттрактор Лоренца.

А так же на рис. 7 представлен график расстояний, на которые разлетаются близлежащие траектории на каждом  $k$ -м шаге в ходе выполнения метода.

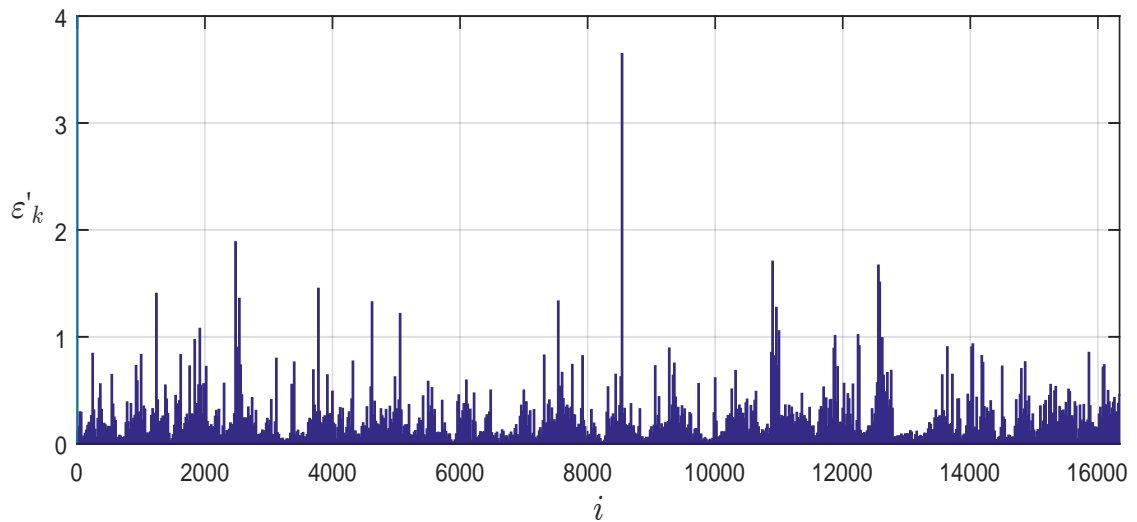


Рис. 7: График расстояний  $\varepsilon'_k$

Старший показатель Ляпунова, вычисленный по формуле (4) в примере Вольфа получен равным 2.16, что подтверждается и методом Бенеттина, когда старший показатель Ляпунова находится по известной динамической системе (5). График показателя показан на рис. 8. Существование положительного показателя позволяет говорить о возможном наличии хаотического поведения, а для данной системы, в силу нелинейного ограничения, и о странном аттракторе.

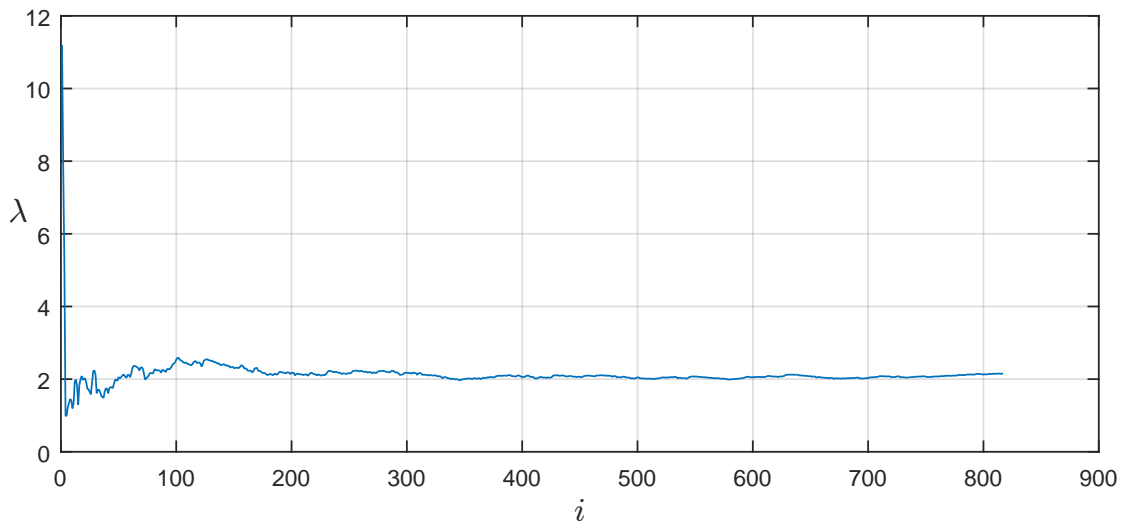


Рис. 8: Старший показатель Ляпунова  $\lambda = 2.16$

# Глава 3. Вычисление старшего показателя Ляпунова для одной модели звездной динамики

## 3.1. Описание модели движения звезды

Рассмотрим модель движения звезды в полярной системе координат  $(R, \theta, z)$ , заданную системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\mathbf{r}} = \nabla\varphi, \quad (6)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор пробной звезды,  $\varphi$  — скалярная функция координат  $(R, \theta, z)$ , задающая безразмерный гравитационный потенциал (характеризующий гравитационное поле), оператор

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial R}, \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$$

и  $R$  — положительный полярный радиус,  $\theta$  — полярный угол вращения (против часовой стрелки),  $z$  — вертикальная ось.

Движение пробной звезды задаётся решением задачи Коши с начальными данными:

$$\mathbf{r}(t_0) = (R_0, \theta_0, z_0)^T \quad \text{и} \quad \mathbf{v}(t_0) = (v_{R0}, v_{\theta 0}, v_{z0})^T,$$

где  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  — вектор скорости движения звезды. При этом будем считать, что безразмерный потенциал  $\varphi$  задаётся формулами вида [16]:

$$\varphi(\xi) = \frac{\alpha}{\alpha - 1 + w(\xi)},$$

$$w(\xi) = \left( 1 + \alpha^p \xi^p \right)^{1/p},$$

при условии, что переменная  $\xi$  определяется равенством

$$\xi^2 = R^2 + z^2 + 2(1 - \varepsilon) \left( \sqrt{z^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon \right)$$

и значениях структурных параметров  $\alpha > 0, p > 0, \varepsilon \in [0, 1]$ .

Для рассматриваемой стационарной ротационно-симметричной моде-

ли имеют место интегралы энергии  $E$  и площадей  $I$  [16]:

$$E = \frac{1}{2} \left( v_R^2 + v_\theta^2 + v_z^2 \right) - \varphi(\xi), \quad I = Rv_\theta,$$

где  $v_R, v_\theta, v_z$  — компоненты скорости соответствующих цилиндрических координат  $R, \theta, z$ . Ротационная симметрия означает, что потенциал  $\varphi$  не зависит от угла  $\theta$  (только от  $R$  и  $z$ ). Тогда исходная система (6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= v_R, & \dot{v}_R &= \frac{I^2}{R^3} + \frac{\partial \varphi}{\partial R}, \\ \dot{\theta} &= \frac{I}{R^2}, & \dot{v}_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \dot{z} &= v_z. \end{aligned} \tag{7}$$

Далее будем исследовать движение звезды только в плоскости  $z = 0$  (при начальных условиях  $z_0 = 0$  и  $v_{z0} = 0$ ), тогда система (7) сократится до трех обыкновенных дифференциальных уравнений и, с учётом вида потенциала  $\varphi$ , окончательно получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{R} &= v_R, \\ \dot{\theta} &= \frac{I}{R^2}, \\ \dot{v}_R &= \frac{I^2}{R^3} - \frac{\alpha^{p+1} R^{p-1} \left( 1 + \alpha^p R^p \right)^{(1-p)/p}}{\left( \alpha - 1 + \left( 1 + \alpha^p R^p \right)^{1/p} \right)^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Все используемые переменные являются безразмерными. Для перехода от безразмерных единиц к размерным необходимо домножить на соответствующий размерный коэффициент.

### 3.2. Реконструкция аттракторов по временным рядам псевдоэкспериментальных данных

1. Рассмотрим интеграл площадей  $I = 0.7016$  и начальную точку: полярный радиус  $R = 1.2$ , полярный угол  $\theta = 0$  и  $v_R = 0$ , а также фиксированные значения параметров

$$p = 0.4 \quad \text{и} \quad \alpha = 2.$$

Приведем далее график, отображающие наблюдения по переменной  $R$ , полученный путем численного интегрирования системы (8) стандартным методом в пакете MATLAB (Рис. 9). Впоследствии эти наблюдения рассматриваются как псевдоэкспериментальные данные, как если бы сама динамическая система была неизвестна.

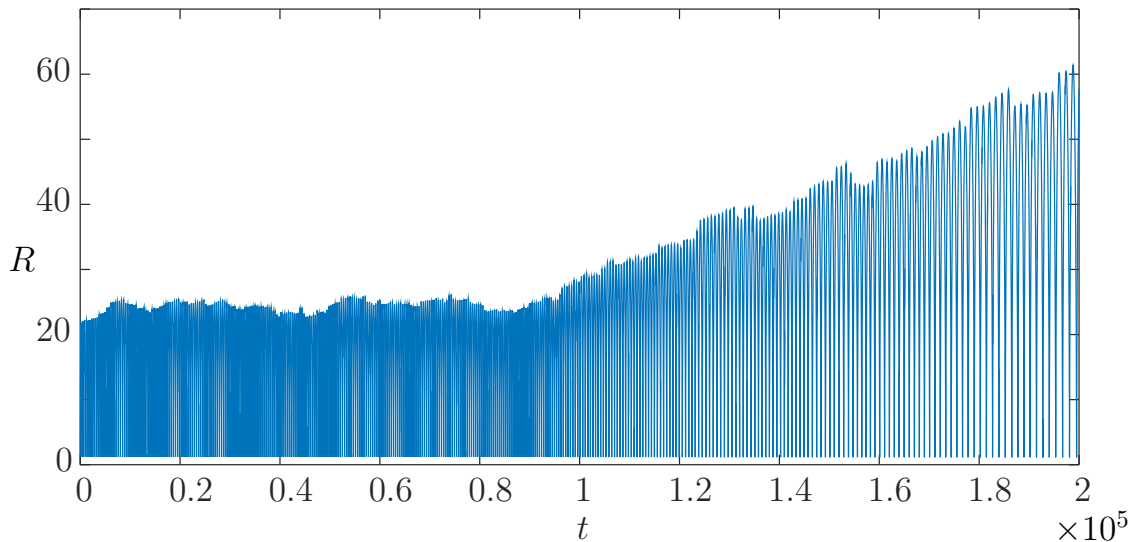


Рис. 9: Визуальное представление временного ряда псевдоэкспериментальных данных

Временной ряд, который будет использоваться в качестве экспериментальных данных в методе Такенса, для реконструирования аттрактора системы (8),

$$R_i = R(t_i), \quad t_i = 10i, \quad i = 0, 1, \dots, 20000$$

представлен в табл. 1.



Таблица 1: Временной ряд псевдоэкспериментальных данных

$t_i$	0	10	20	...	199980	199990	200000
$R_i$	1.200000	4.263244	7.127422	...	56.975403	57.380087	57.766636

Графики основного фазового портрета системы (8) и аттрактора, восстановленного методом Такенса, изображены на рис. 10.

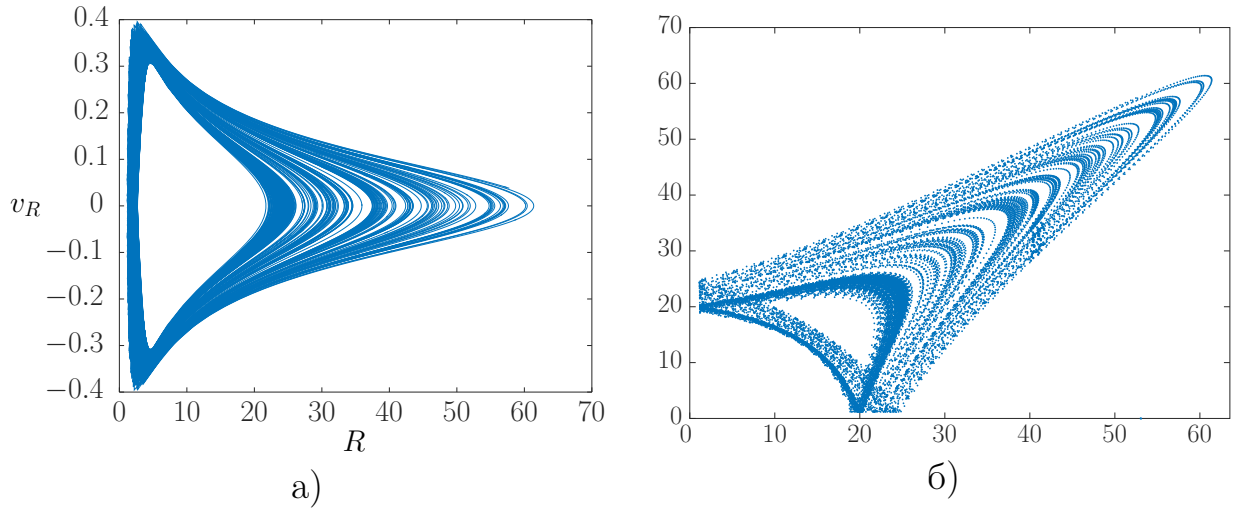


Рис. 10: а) Фазовый портрет, б) Реконструированный аттрактор

Как видно на представленных рисунках, реконструированный аттрактор достаточно точно отображает основной аттрактор системы (8) при выбранных параметрах.

**2.** Рассмотрим следующий набор параметров: примем интеграл площадей  $I = 0.4$ , полярный радиус  $R = 0.5$ , полярный угол  $\theta = 0$  и  $v_R = 0.5$ , а также зафиксируем значения параметров

$$p = 3 \quad \text{и} \quad \alpha = 1.$$

Далее, приведем соответствующий график, отображающий динамику по переменной  $R$  (Рис. 11), и представим в табл. 2 временной ряд  $R_i = R(t_i)$ , где  $t_i = 10i$  при  $i = 0, 1, \dots, 20000$ .

Таблица 2: Временной ряд псевдоэкспериментальных данных

$t_i$	0	10	20	...	199980	199990	200000
$R_i$	0.500000	1.736379	0.867515	...	2.726192	1.492619	1.386241

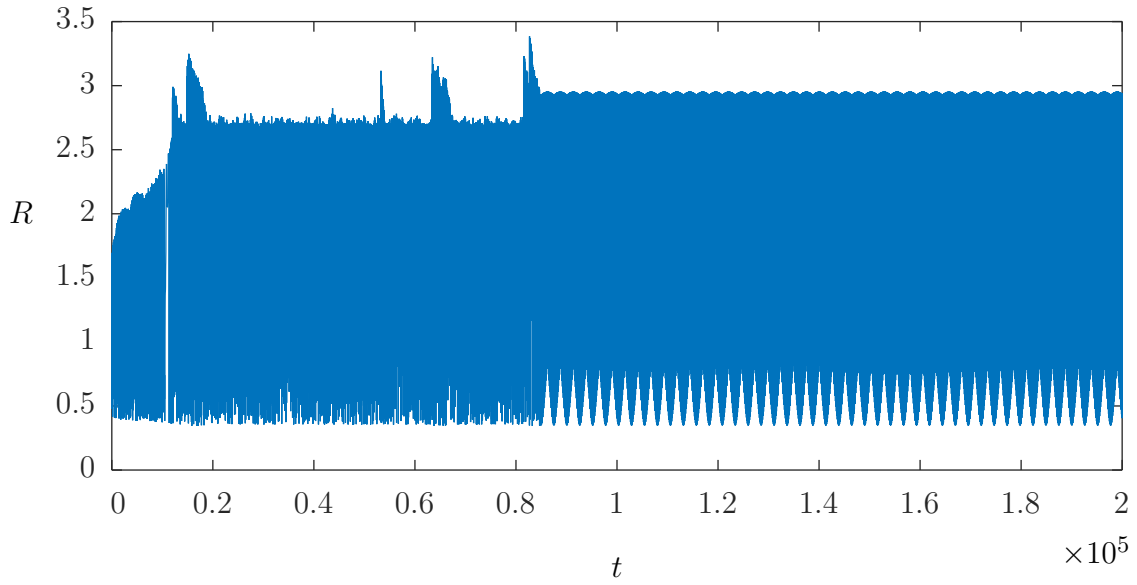


Рис. 11: Визуальное представление временного ряда  $R_i$

Здесь видно, что динамика изменения значений полярного радиуса  $R$  сначала носит хаотический характер, а затем приходит к периодическому закону.

Укажем также, соответствующие аттракторы (Рис. 12).

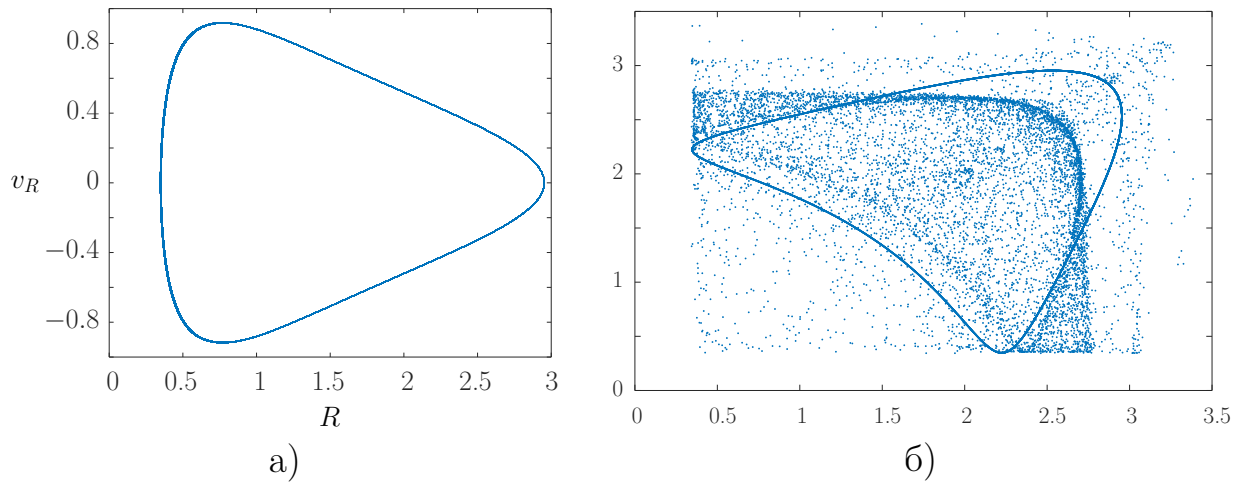


Рис. 12: а) Фазовый портрет, б) Реконструированный аттрактор

На рис. 12 слева отображены последние витки аттрактора установившегося периодического движения звезды — розеточная траектория, справа показан реконструированный аттрактор для всего интервала времени, с начальным хаотическим этапом движения звезды. Видно, что реконструированный аттрактор отражает как хаотическое поведение звезды, так и последующее установившееся периодическое.

**3.** Рассмотрим третий набор параметров: интеграл площадей  $I = 0.4$ , полярный радиус  $R = 0.5$ , полярный угол  $\theta = 0$  и  $v_R = 0.5$ , а также зафиксируем набор параметров:

$$p = 0.6 \quad \text{и} \quad \alpha = 1.9.$$

Отобразим полученный временной ряд на рис. 13, где

$$R_i = R(t_i), \quad t_i = 2i, \quad i = 0, 1, \dots, 100000.$$

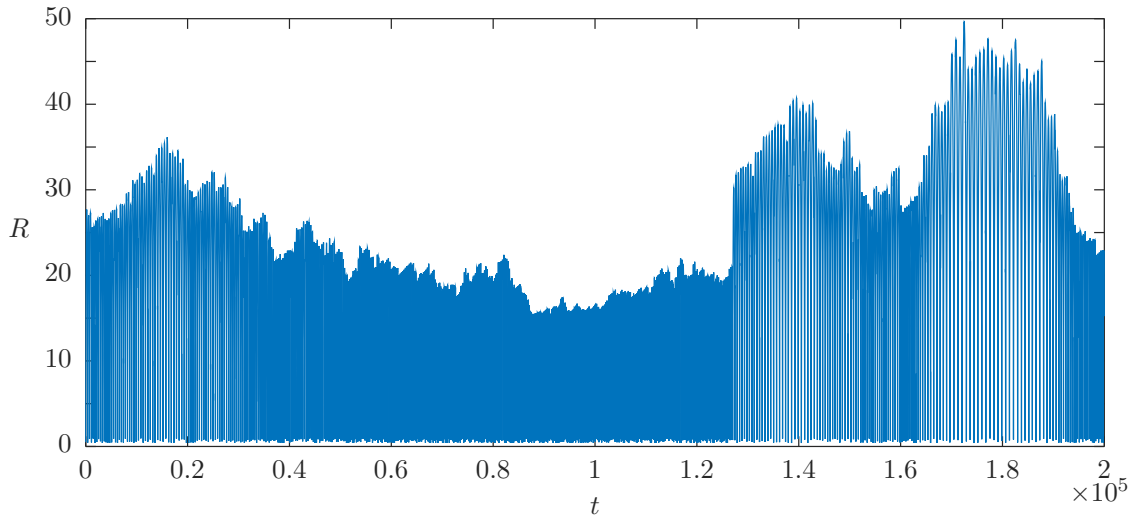


Рис. 13: Визуальное представление временного ряда  $R_i$

Для реконструкции соответствующего аттрактора и расчёта старшего показателя Ляпунова рассмотрим последние 20000 значений временного ряда  $R_i$  (Табл. 3).

Таблица 3: Временной ряд псевдоэкспериментальных данных

$t_i$	160000	160002	160004	...	199996	199998	200000
$R_i$	24.988834	25.151771	25.309983	...	15.909073	15.574126	15.228036

Основной и реконструированный аттракторы представлены на рис. 14, где слева отображён график основного аттрактора системы (8), а справа — реконструированный при генерации временного ряда псевдоэкспериментальных данных  $R_i$  с шагом численного интегрирования системы, принятым равным двум. Это отразилось на виде реконструированного аттрактора по сравнению с пунктом 1) данного параграфа.

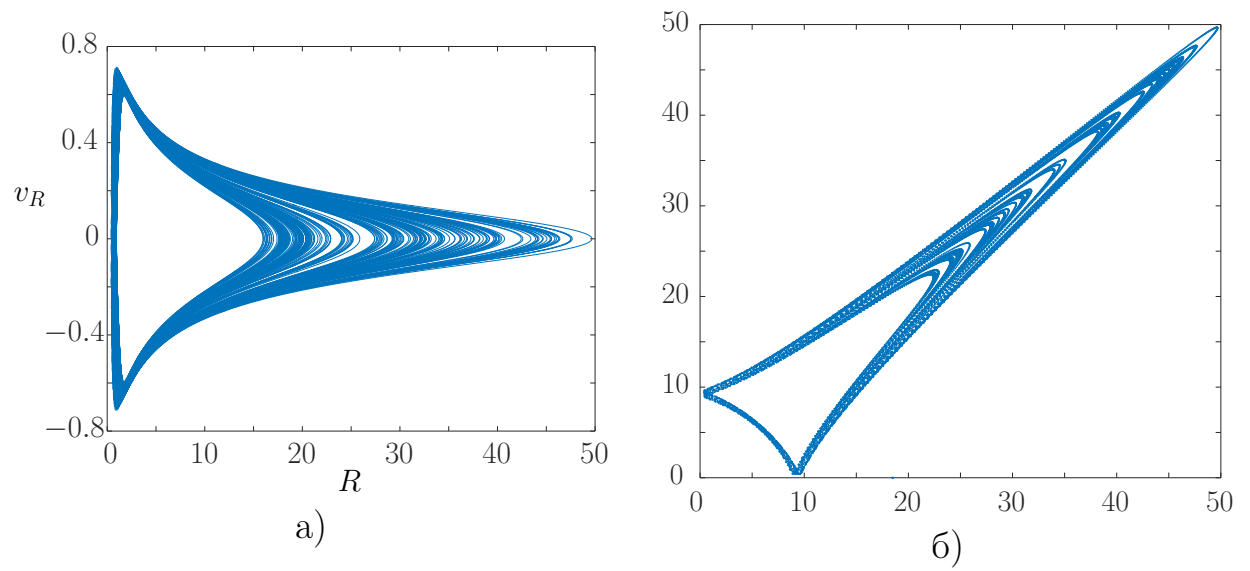


Рис. 14: а) Фазовый портрет, б) Реконструированный аттрактор

Здесь чётко отражается экспоненциальная скорость разбегания траекторий, изменения значений полярного радиуса  $R$  носят хаотический характер с последующим безграничным возрастанием и соответствующим улетанием звезды.

### 3.3. Расчет старшего показателя Ляпунова для различных классов движений звезды

Теперь, на основе рассчитанных реконструированных аттракторов, вычислим значения старших показателей Ляпунова для рассмотренных наборов параметров и соответствующих типах движения звезды для случая ротационно-симметричного потенциала  $\varphi$ .

1. Первый набора параметров: интеграл площадей  $I = 0.7016$ , полярный радиус  $R = 1.2$ , полярный угол  $\theta = 0$ ,  $v_R = 0$  и фиксированные значения параметров

$$p = 0.4 \quad \text{и} \quad \alpha = 2.$$

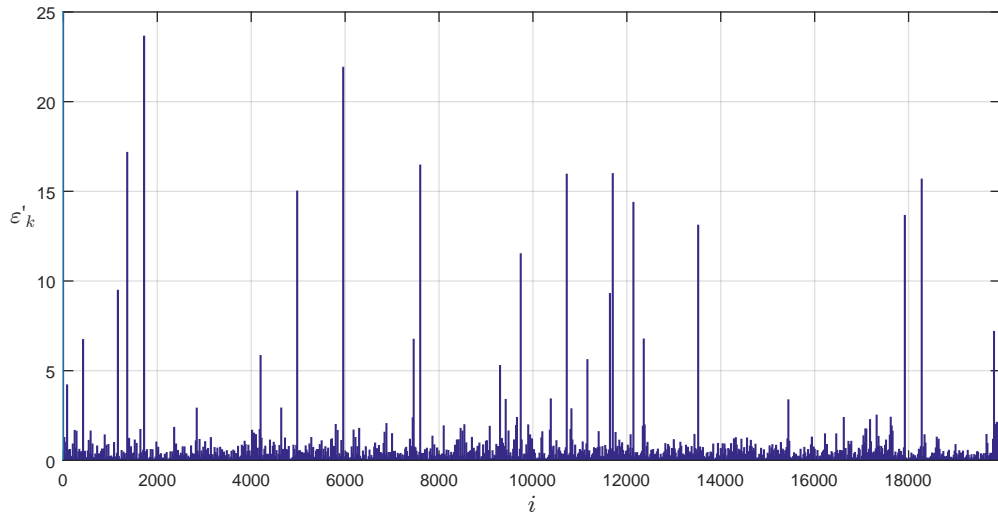


Рис. 15: График расстояний  $\varepsilon'_k$

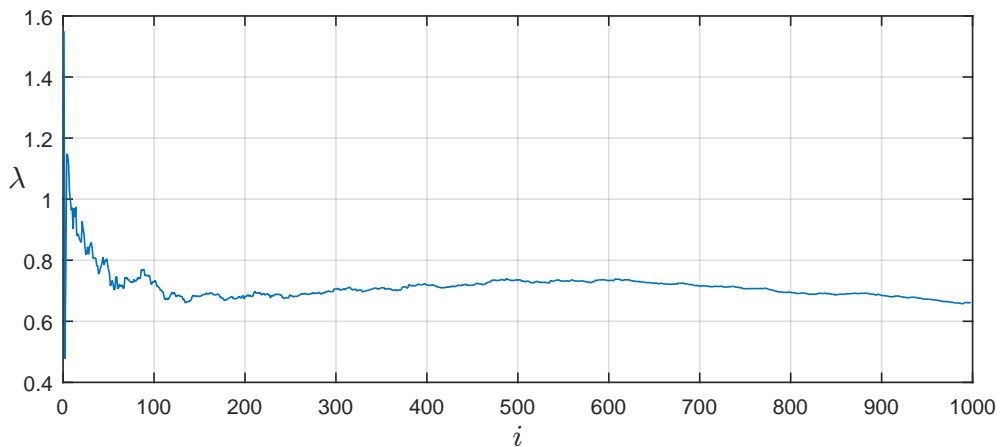


Рис. 16: Старший показатель Ляпунова  $\lambda = 0.6614$

На рис. 15 и рис. 16 отображены: график расстояний  $\varepsilon'_k$ , на которые разбегаются близлежащие траектории на каждом  $k$  - м шаге в ходе

выполнения метода, а так же график старшего показателя Ляпунова, характеризующего экспоненциальную скорость разбегания, соответственно.

Характер изменения полярного радиуса  $R$ , как было показано в предыдущем параграфе в пункте 1), является хаотическим, что и подтверждается положительным старшим показателем Ляпунова  $\lambda = 0.6614$ . Причём это значение для данного набора параметров и начальных данных существенно больше, чем рассчитанное методом Вольфа по известным правым частям динамической системы.

2. Аналогичные графики на рис. 17 и рис. 18 для второго набора параметров: интеграл площадей  $I = 0.4$ , полярный радиус  $R = 0.5$ , полярный угол  $\theta = 0$  и  $v_R = 0.5$ , а также фиксированные значения параметров

$$p = 3 \quad \text{и} \quad \alpha = 1.$$

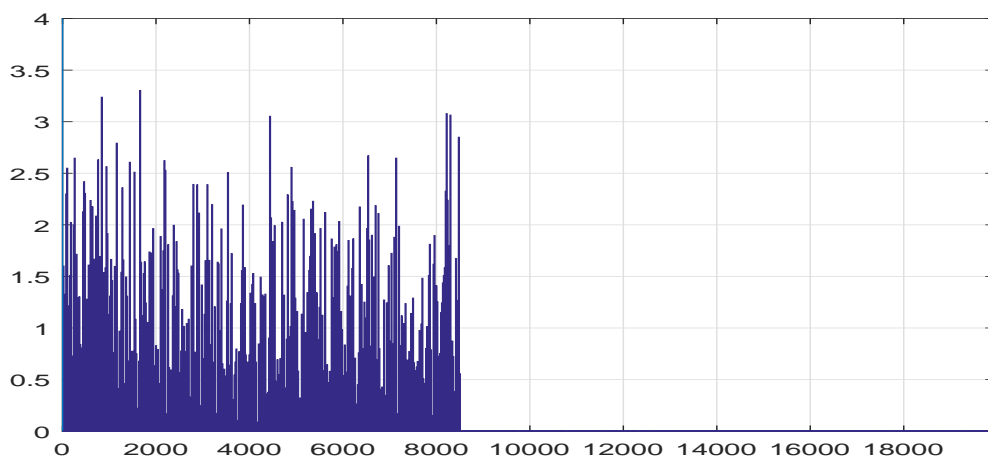


Рис. 17: График расстояний  $\varepsilon'_k$

Здесь, после 8000 условных единиц времени, псевдоэкспериментальные данные устанавливаются в периодический временной ряд. Разбегание близких траекторий прекращается, остаётся исходно малым, что хорошо видно на рис. 17. Тогда расчёт старшего показателя Ляпунова начинает усредняться со всё большим количеством бесконечно малых величин и, соответственно, устремляется к нулю, что уже показано на следующем графике.

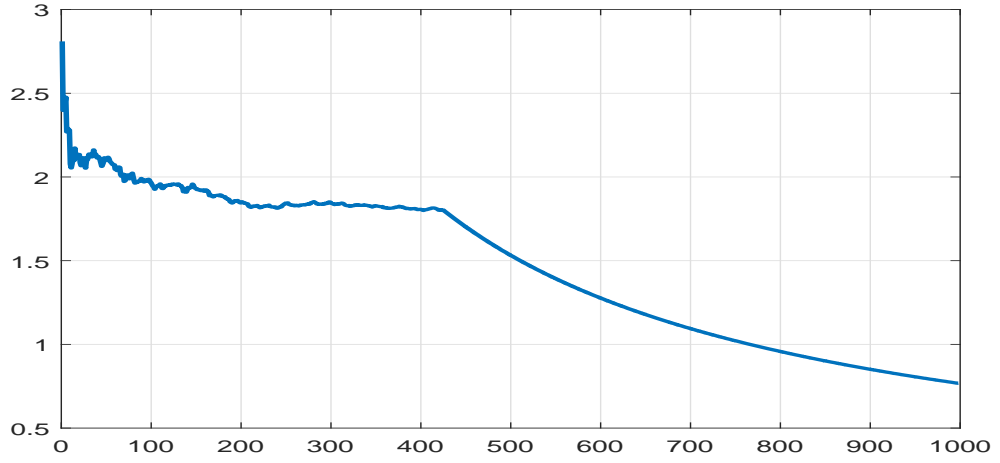


Рис. 18: Старший показатель Ляпунова  $\lambda \leq 0$

После 1000 итерации значение старшего показателя Ляпунова высчитать не представляется возможным, т.к. оно становится меньшим нуля и забивается белым шумом (погрешность ошибки наблюдения и т.п.).

**3.** Рассмотрим последний набор параметров. Примем интеграл площадей  $I = 0.4$ , полярный радиус  $R = 0.5$ , полярный угол  $\theta = 0$ ,  $v_R = 0.5$ . Зафиксируем

$$p = 0.6 \quad \text{и} \quad \alpha = 1.9.$$

График расстояний  $\varepsilon'_k$  для таких параметров отображен на рис. 19. Здесь

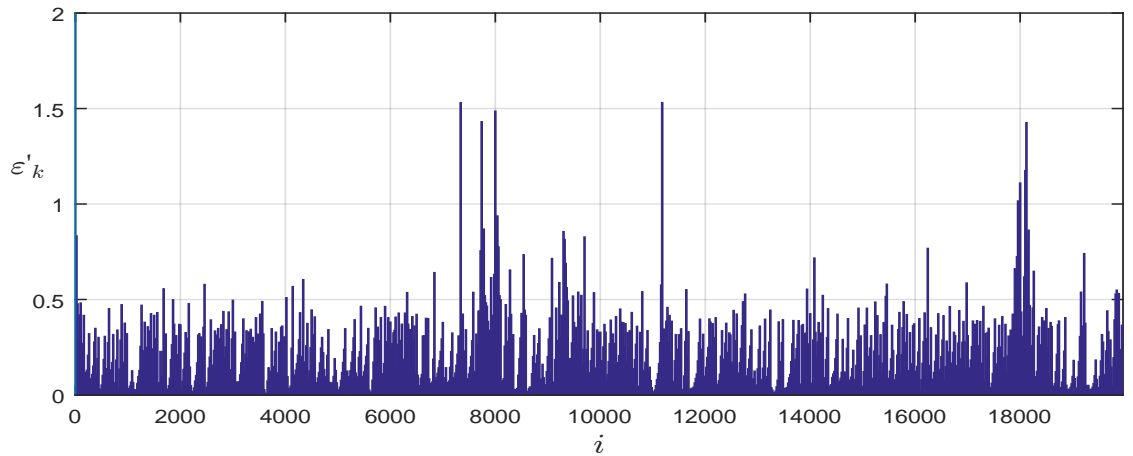


Рис. 19: График расстояний  $\varepsilon_i$

значения расстояний разбегания соседних траекторий являются достаточно существенными, что и характеризует наличие хаотической динамики движения звезды.

Приведём далее график старшего показателя Ляпунова на рис. 20.

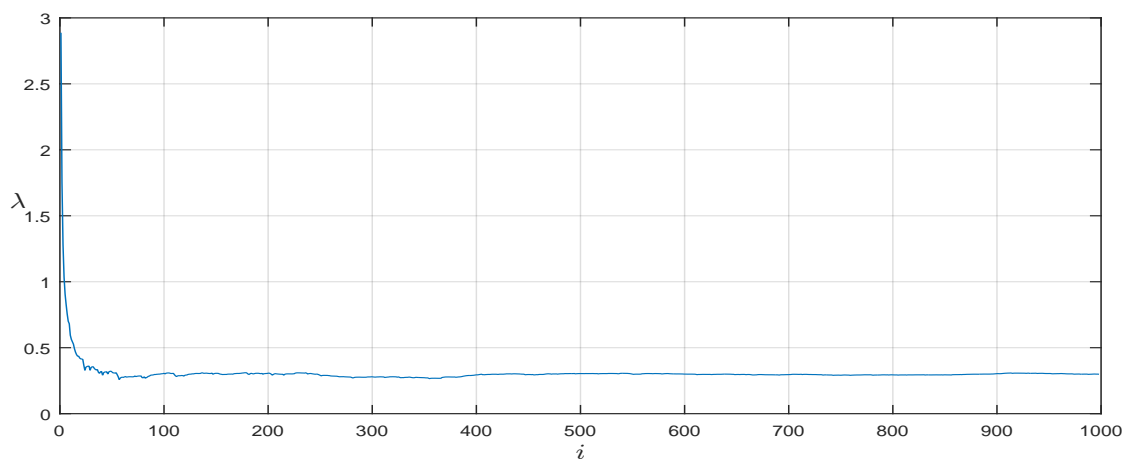


Рис. 20: Старший показатель Ляпунова  $\lambda = 0.2984$

Как видно, старший показатель Ляпунова  $\lambda = 0.2984$  положительный, что и отвечает хаотическому типу движения звезды при рассмотренных наборе параметров и начальных данных, по которым производилась генерация временного ряда псевдоэкспериментальных наблюдений.



# Выводы

Исследование динамики реальных процессов и явлений зачастую начинается с накопления экспериментальных данных в виде временных рядов. В последующем значения этих временных рядов должны быть обработаны с целью выявления в них каких-либо важных динамических характеристик, присущих наблюдаемому процессу. Одной из таких характеристик является мера экспоненциальной скорости разбегания траекторий движений, начавшихся в достаточно малой окрестности — старший показатель Ляпунова. Положительные значения старшего показателя Ляпунова отвечают хаотическим типам движений динамических систем, анализ которых особенно затруднителен. Тем самым, определение возможной меры хаоса в экспериментальных данных является весьма важной и интересной задачей.

Основные результаты представленной дипломной работы:

- Изучен и отработан на примере модели Лоренца алгоритм Такенса реконструкции аттрактора динамической системы по одному временному ряду экспериментальных данных.
- Методом Вольфа, по временным рядам псевдоэкспериментальных данных для системы Лоренца (с определённым набором параметров и начальной точкой), был продублирован расчёт старшего показателя Ляпунова.
- На примере одной модели динамики движения звезды при стационарном ротационно-симметричном потенциале  $\varphi$  была произведена генерация псевдоэкспериментальных данных для ряда ключевых наборов параметров рассмотренной системы.
- По полученным временным рядам была произведена соответствующая реконструкция аттракторов, отвечающих основной динамике движения звезды в этой модели. Показана эквивалентность реконструированных аттракторов с реальными.
- Методом Вольфа по временным рядам псевдоэкспериментальных данных рассчитаны старшие показатели Ляпунова, правильно отража-

ющие наличие или отсутствие хаотических режимов поведения для предложенной модели движения звезды.

Таким образом, показана возможность идентификации меры хаотического поведения в траекториях ротационно-симметричной модели движения звезды по наблюдаемым данным временных рядов.

## Список литературы

- [1] Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 295 с.
- [2] Головкин В. А. Нейросетевые методы обработки хаотических процессов // Научная сессия МИФИ-2005. VII Всероссийская научно - техническая конференция «Нейроинформатика -2005»: Лекции по нейроинформатике. М.: МИФИ, 2005. С. 43–91.
- [3] Лоскутов А. Ю. Анализ временных рядов. Курс лекций. *http : //chaos.phys.msu.ru/loskutov/PDF/Lectures\_time\_series\_analysis.pdf*
- [4] Анищенко В. С. Динамические системы // Соросовский образовательный журнал, 1997. № 11. С. 77–84.
- [5] Кратчфилд Д. П. Хаос // В мире науки, 1987. № 2. С. 18–28.
- [6] Зеленый А. С. Об определении порога хаоса одной динамической системы // *http : //www.twirpx.com/file/1678632/*
- [7] Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Lecture Notes in Mathematics, Vol. 898, Springer-Verlag, Berlin, 1980, pp. 366–381; and in Dynamical System in Turbulence, Warlock, 1980, Eds. D. Rand and L. S. Young.
- [8] Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / Перевод с франц. Ю. А. Данилова - М.: Мир, 1991. 368 с.
- [9] Реферат: Детерминированный хаос. *http : //www.bestreferat.ru/referat – 95144.html*
- [10] Ивановский А. Хаос наступает // *http : //w – o – s.ru/article/4160*

- [11] Аттрактор и бабочка // [http : //lenta.ru/articles/2008/04/18/lorenz/](http://lenta.ru/articles/2008/04/18/lorenz/)
- [12] Ласкар Ж., Фрошле К., Челлетти А. Измерение хаоса с помощью численного анализа фундаментальных частот. Приложение к стандартному отображению/ Перевод с англ. – А. Г. Арзамасцева – 1992
- [13] Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vasano J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica 16D. 1985. P. 285–317.
- [14] Оселедец В. И., Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Труды Московского Математического Общества, т.19, 1968. С. 179–210
- [15] Мун Ф. Хаотические колебания. / Перевод с англ. Ю. А. Данилова и А. М. Шукурова - М.: Мир, 1990. 312 с
- [16] Davydenko A. A., Raspopova N. V., Ustimenko S. S. On mass simulations of dynamical models of galaxy // International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015.